

**Esame Geometria 3: 30 marzo 2023**  
**Prof. P.A. Oliverio - Dr. F.G. Infusino**

**Esercizio 1.** Si consideri la curva  $\gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3$  così definita:

$$\gamma(t) = (1 - \cos(t), \ln(t), -\sin(t))$$

- (1) Determinare la curvatura e la torsione di  $\gamma$  in ogni suo punto. **(4 pt.)**
- (2) Determinare il triedro di Frenet-Serret nel punto corrispondente a  $t = \pi$ . **(2 pt.)**

**Esercizio 2.** Si consideri la parametrizzazione  $r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita da

$$r(u, v) = (u, u^3 - 3uv^2, v)$$

- (1) Determinare i coefficienti metrici, i coefficienti della seconda forma fondamentale e stabilire la natura dei punti di  $S$ . **(4 pt.)**
- (2) Determinare un'equazione cartesiana del piano tangente alla superficie nel punto  $P = r(1, 1)$ . **(2 pt.)**

**Esercizio 3.** (1) Determinare la trasformazione lineare fratta  $f$  che manda  $3$  in  $\infty$ ,  $1 + i$  in  $-\frac{7}{5} - \frac{i}{5}$  e  $0$  in  $-\frac{2}{3}$ . **(3 pt.);**

- (2) Determinare l'immagine tramite  $f$  di  $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ . **(3 pt.);**

**Esercizio 4.** Calcolare il valore dei seguenti integrali:

- (1)  $\oint_{\gamma(-1;6)} \frac{\sin(z)}{(z+2)^2} dz$
- (2)  $\oint_{\gamma(-1;3)} z^2 e^{\left(\frac{1}{z+1}\right)} dz$ ; **(3 pt.);**

Trovare inoltre la serie di Laurent centrata in  $z = 3i$  della funzione

$$f(z) = \frac{-1}{z^2 + iz + 12} \quad \text{(3pt.);}$$

**Esercizio 5.** Risolvere i seguenti esercizi:

- (1) Dire per quali valori di  $a \in \mathbb{C}$  la funzione

$$f(z) = (a^4 - 7)z\bar{z} - (a + 1)z \sin(-z) - 9|z|^2$$

risulta essere intera. **(3 pt.)**

- (2) Determinare poli e zeri in  $\mathbb{C}$ , con rispettive molteplicità, ed eventuali singolarità eliminabili della funzione:

$$f(z) := \frac{\sin^3(\pi z)}{z^5(z-2)^3} \quad \text{(3pt.);}$$